Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y, x-y, y)$

(ii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^5$

Geben Sie jeweils eine (kurze) Begründung an.

(i) f injektiv $\Leftrightarrow$ $(f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2)$ ①

$$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \\ y_1 = y_2 \end{array} \right\}$$ ①

Insbesondere folgt $y_2 = y_1$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, folgt auch $x_2 = x_2$.

Also ist f injektiv. ①

f ist nicht surjektiv, da $f(x,y) = (1,0,0)$ nicht lösbar ist: ①

Die letzte Komponente erzwingt $y = 0$, die ersten beiden Gleichungen sind dann $x = 1$ und $x = 0$. ②

<u>Alternative</u>

f wird durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben. ③

Der Rang von A ist offenbar zwei. ①

Da der Rang gleich der Spaltenzahl ist, ist die Abbildung injektiv. ①

Da der Rang kleiner der Zeilenzahl ist, ist die Abbildung nicht surjektiv. ①

(ii) Sind η_1 und η_2 verscheidene fünfte Einheitswurzeln, so ist $f(\eta_1) = 1 = f(\eta_2)$.

Daher ist f nicht injektiv. ③

f ist surjektiv, da zu $w = r\exp(i\varphi)$ eine Lösung von $f(z) = w$ durch $z = r^{1/5}\exp(i\frac{\varphi}{5})$ gegeben ist. ②

Ist $w = 0$, kann man $z = 0$ wählen. ①

<u>Alternative</u> bei der Surjektivität: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat die Gleichung $z^5 - w = 0$ für jedes w mindestens eine Lösung in $\mathbb{C}$.

(i) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\arg z^2 = \frac{\pi}{2}$ und $|z|^2 = 2$

(ii) Sei $z = -1 + \sqrt{3}i$. Berechnen Sie z^{48} und geben Sie eine Zahl w in der Form $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ an, die $w^3 = z$ erfüllt.

Bei w reicht die Angabe von r und φ.

$\arg z^2 = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg z = \dfrac{\pi}{4}$ oder $\arg z = -\dfrac{3}{4}\pi$ ③

$|z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}$ ①

$z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{1}{4}\pi + i\sin\dfrac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}i}\right) = 1 + i$ oder ①

$z = \sqrt{2}\left(\cos -\dfrac{3}{4}\pi + i\sin -\dfrac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}i}\right) = -1 - i$ ①

(ii) Es ist $|z| = 2$ und $\operatorname{Im} z > 0$,$\cos\arg z = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \arg z = \dfrac{2}{3}\pi.$ ②

Es ist also $z = 2(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi)$ ①

$z^{48} = 2^{48}(\cos 32\pi + i\sin 32\pi) = 2^{48}$ ①

$|w| = r = \sqrt[3]{2}$ ①

$\arg w = \varphi = \dfrac{2}{9}\pi \quad (\widehat{=}40^\circ)$ ①

Beweisen Sie: für $n \in \mathbb{N}$ ist $\quad n \cdot \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2^n}$

Beweis über Induktion.

Induktionsanfang $n = 1$.

Zu zeigen ist $1 \cdot \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$.

Dies ist klar. 2.

Für $n = 2$ gilt $2 \cdot \frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{2^2} \Leftrightarrow \frac{2}{9} \leq \frac{1}{4}$. Die ist wahr.

Schritt von n nach $n + 1$

Voraussetzung ist $\frac{n}{3^n} \leq \frac{1}{2^n}$

Zu zeigen ist $\frac{n+1}{3^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ ordentlich formuliert: 2

Beweis:

$$\frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{n+1}{3n} \cdot \frac{n}{3^n}$$

$$\overset{\text{n.V.}}{\leq} \frac{n+1}{3n} \cdot \frac{1}{2^n} \qquad 4$$

$$= \frac{2(n+1)}{3n} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \qquad 2$$

Der Beweis ist erbracht, wenn man für $n > 1$ nachweisen kann, dass $\frac{2(n+1)}{3n} \leq 1$ ist. 2

$\frac{2(n+1)}{3n} \leq 1 \Leftrightarrow 2(n+1) \leq 3n \Leftrightarrow 2n + 2 \leq 3n \Leftrightarrow 2 \leq n$. 2

Da der Schritt nur für $n \geq 2$ durchführbar ist, muss oben im Induktionsanfang die Behauptung für $n = 2$ noch "von Hand" gezeigt werden.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Alternative Rechnung für den Induktionsschritt

Der Schritt wird etwas einfacher aufzuschreiben, wenn man die Behauptung so umformt:

Es ist $A(n) : \frac{n}{3^n} \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$ und $A(n+1) : \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \geq n + 1$.

Beweis des Schritts:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{3}{2}\right) \frac{3}{2} \overset{\text{n.V.}}{\geq} n \cdot \frac{3}{2} = n(1 + \frac{1}{2}) = n + \frac{n}{2} \overset{n \geq 2}{\geq} n + 1.$$

(i) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $\begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ \overline{z} & z \end{pmatrix}$ invertierbar?

(ii) Die Geraden g_1 und g_2 in $\mathbb{R}^3$ seien durch $g_1 : \vec{x} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{w} + s\vec{v}$, $s \in \mathbb{R}$ gegeben. Weisen Sie nach, dass gilt:

Wenn sich die Geraden schneiden, dann ist $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

(i) $\begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ \overline{z} & z \end{pmatrix}$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ \overline{z} & z \end{pmatrix} \neq 0$ ②

$\Leftrightarrow z^2 - \overline{z}^2 \neq 0 \Leftrightarrow (z + \overline{z})(z - \overline{z}) \neq 0$ ②

$z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z} \Leftrightarrow z = ib,\ b \in \mathbb{R}$ ①

$z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow z = a,\ a \in \mathbb{R}$

Die Matrix ist invertierbar, wenn weder $\operatorname{Re} z = 0$ noch $\operatorname{Im} z = 0$ ist ①

Alternative:

Mit $z = a + ib$ und $\overline{z} = a - ib$ wird die Matrix auf Zeilenstufenform gebracht, indem die erste Zeile zur zweiten addiert wird:

$\begin{pmatrix} a+bi & a-bi \\ a-bi & a+bi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+bi & a-bi \\ 2a & 2a \end{pmatrix}$ ②

Ist $a = 0$, so ist die Matrix nicht invertierbar. ②

Sonst dividiert man durch 2 und subtrahiert die zweiten Zeile von der ersten:

$\begin{pmatrix} a+bi & a-bi \\ a & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} bi & -bi \\ a & a \end{pmatrix}$

Wenn $b = 0$ ist, ist die Matrix nicht invertierbar, sonst kann man die erste Zeile durch bi und die zweite Zeile durch a dividieren und erhält durch Zeilenumformungen dieinvertierbare Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist die Matrix invertierbar, wenn weder $\operatorname{Re} z = 0$ noch $\operatorname{Im} z = 0$ ist ②

(ii) Die Geraden schneiden sich

$\Leftrightarrow t\vec{u} = \vec{w} + s\vec{v}$ hate eine Lösung $(s, z))$ ②

$\Leftrightarrow \vec{w} = t\vec{u} - s\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}, v, \vec{w}$ sind linear abhängig ②

$\Rightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ ②