Dr. P. Furlan

Fakultät für Mathematik
Universität Dortmund

Probeklausur zur Höheren Mathematik I

WS 2009/10

Insgesamt kann man 50 Punkte erreichen. Bei 20 Punkten ist die Klausur bestanden.

Aufgabe 1: .... (6+6=12 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y, x - y, y)$

(ii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^5$

Geben Sie jeweils eine (kurze) Begründung an.

Aufgabe 2: .... (6+6=12 Punkte)

(i) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\arg z^2 = \frac{\pi}{2}$ und $|z|^2 = 2$

(ii) Sei $z = -1 + \sqrt{3}i$. Berechnen Sie z^{48} und geben Sie eine Zahl w in der Form $w = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ an, die $w^3 = z$ erfüllt.

Bei w reicht die Angabe von r und φ.

Aufgabe 3: .... (14 Punkte)

Beweisen Sie: für $n \in \mathbb{N}$ ist $\quad n \cdot \dfrac{1}{3^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$

Aufgabe 4: .... (6+6=12 Punkte)

(i) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $\begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ \overline{z} & z \end{pmatrix}$ invertierbar?

(ii) Die Geraden g_1 und g_2 in $\mathbb{R}^3$ seien durch $g_1 : \vec{x} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{w} + s\vec{v}$, $s \in \mathbb{R}$ gegeben. Weisen Sie nach, dass gilt:

Wenn sich die Geraden schneiden, dann ist $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.