Dr. P. Furlan

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

9. Übungsblatt zur Höheren Mathematik I (P/ET/IT/AI/IKT) WS 2009/10

Abgabetermin für die ersten beiden Aufgaben: Mittwoch, 16.12.09, 12:00.

Wichtige Begriffe: homogene Koordinaten, orthogonale und unitäre Matrizen, Spiegelung, Drehung, Projektion

Aufgabe 33:

Geben Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^2$ aus Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2-4i \\ 2+4i & 2 \end{pmatrix}$ an und schreiben Sie A als $A = UJU^*$ mit einer unitären Matrix U und einer Diagonalmatrix J.

Aufgabe 34:

Sei $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$.

(i) Schreiben Sie A in der Form $A = SJS^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix J.

(ii) Benutzen Sie (i), um A^4 zu berechnen.

(iii) Bestimmen Sie mit Hilfe von (i) alle Matrizen B mit $B^2 = A$.

(iv) Bestimmen Sie mit Hilfe von (i) die Matrix A^{-1}.

Aufgabe 35:

Bestimmen Sie einen Eigenvektor von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

der auf $(1, -4, 1)^\top$ senkrecht steht.

Aufgabe 36:

(i) (a) Geben Sie die Matrix derjenigen Drehung im $\mathbb{R}^2$ an, die den Vektor $(2, 3)^\top$ auf den Vektor $(3, 2)^\top$ abbildet.

(b) Warum gibt es keine Drehung, die $(2, 3)^\top$ auf $(-2, 2)^\top$ abbildet?

(ii) Geben Sie die Matrix derjenigen Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ an, die den Vektor $(2, 3)^\top$ auf den Vektor $(3, 2)^\top$ abbildet.

Kleine Weihnachts-Extra-Aufgaben: (gehen in je zwei Zeilen)

(i) Beweisen Sie:

Wenn die reelle Matrix A nur reelle Eigenwerte hat, und es eine ONB aus Eigenvektoren gibt, dann ist A symmetrisch.

(ii) Beweisen Sie, dass eine Spiegelungsmatrix $S = E_n - 2\vec{n}\vec{n}^\top$ (mit $|\vec{n}| = 1$) wirklich orthogonal ist. Ist S auch symmetrisch?