Dr. P. Furlan

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

14. Übungsblatt zur Höheren Mathematik I (P/ET/IT/AI/IKT) WS 2009/10

Lösungen zu den ersten vier Aufgaben erscheinen in ca. 14 Tagen. Die restlichen Aufgaben werden in den ersten Übungen im Sommersemester besprochen

Wichtige Begriffe: Regeln von de l'Hospital, Extremum, konvex, konkav, Wendepunkt, Interpolation, Bisektions-, Sekanten-, Newtonverfahren, Regula falsi, Konvergenzradius, gleichmäßige und punktweise Konvergenz, komplexe Exponentialfunktion, hyperbolische und Area-Funktionen

Aufgabe 53:

Die hyperbolischen Funktionen sind folgendermaßen definiert:

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ Sinus hyperbolicus

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ Cosinus hyperbolicus

$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ Tangens hyperbolicus

$\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$ Cotangens hyperbolicus

(i) Ermitteln Sie die Definitionsbereiche, Wertebereiche und Ableitungen.

(ii) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen.

(iii) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(b) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$

(c) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

(d) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

(iv) Definieren Sie die Umkehrfunktionen Area sinus hyperbolicus (arsinh x), Area cosinus hyperbolicus (arcosh x), Area tangens hyperbolicus (artanh x) und Area cotangens hyperbolicus (arcoth x) auf geeigneten Intervallen und drücken Sie diese Funktionen durch Logarithmen aus.

(v) Berechnen Sie die Ableitungen von arsinh x und artanh x jeweils einmal durch Differentiation der in (iv) berechneten Umkehrfunktion und einmal mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion.

Aufgabe 54:

Bestimmen Sie näherungsweise die Lage der Nullstelle von $f(x) = 2\sin x - x$ im Intervall $[1, 2]$

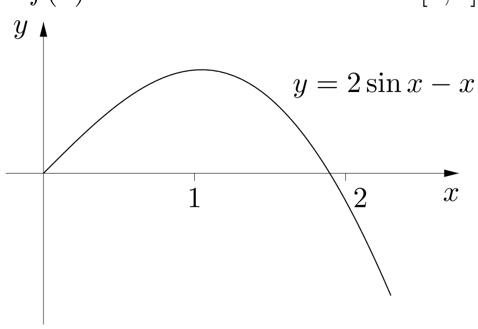
(i) mit dem Bisektionsverfahren

(ii) mit der Regula Falsi

(iii) mit dem Sekantenverfahren

(iv) mit dem Newtonverfahren, $x_0 = 1$

(v) mit dem Newtonverfahren, $x_0 = 2$



Aufgabe 55:

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2(2x)-1}{x^2}$

(ii) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\tan^2(3x)}{\tan^2 x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} x \arcsin \dfrac{1}{x}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

(v) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+\cos x}$

(vi) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x+\cos x}$

Aufgabe 56:

Bestimmen Sie die Konvergenzradien

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\sin n}{n^3}\, z^n,$

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{2n}{n} z^n,$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n}}\, z^n.$

Aufgabe 57:

Welche Funktionen werden durch folgende Potenzreihen dargestellt?

(i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{n-2}}{n!}$

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\, x^n$

(iii) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$

(iv) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2\, x^n$

(v) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\, x^{4n+2}}{2n+1}$

(vi) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$

Aufgabe 58:

Sei $f(x) = \exp(-\frac{x}{2}) \cos \frac{\sqrt{3}x}{2}$

(i) Zeigen Sie $f''' = f$.

(ii) Berechnen Sie die Taylorreihe von f in $a = 0$.

(iii) Wo konvergiert die Reihe? Wo konvergiert die Reihe gegen die Funktion?

Aufgabe 59:

Bestimmen Sie für $|z| < 1$ Reihendarstellungen von $\frac{1}{z-i}$ und $\frac{1}{z+i}$, und daraus mit Hilfe des Cauchyprodukts eine Darstellung von $\frac{1}{1+z^2}$.

Aufgabe 60:

(i) Geben Sie genaue Abschätzungen an für die Größe des Knotenpolynoms bei 2, 3 und 4 äquidistanten Knoten.

Hinweis: Betrachten Sie für $h > 0$ zunächst die Polynome mit den Knoten

(a) $-h$ und h

(b) $-h$, 0 und h

(c) $-3h$, $-h$, h und $3h$

(ii) Von $f(x) = \sin x$ seien die Werte an den Stellen $x_k = k\frac{\pi}{18}$ (also in 10°-Schritten) bekannt.

Zur Berechnung dazwischenliegender Werte wird ein kubisches Interpolationspolynom benutzt. Welcher Fehler entsteht dabei höchstens?