Dr. P. Furlan

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

1. Übungsblatt zur Höheren Mathematik I (P/ET/IT/AI/IKT) WS 2009/10

Abgabetermin für die ersten beiden Aufgaben: Mittwoch, 21.10.09, 12:00.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Ungleichungen

(i) $(x^2-4)(x^2-9)(x^2+5) \leq 0$

(ii) $x^2+8x+15 \leq 0$

(iii) $x^2+8x+16 \leq 0$

(iv) $x^2+8x+17 \leq 0$

Aufgabe 2:

(i) Sei $a_1 = 12$ und für $n > 1$ sei $a_{n+1} = \dfrac{2n+6}{2n+1}a_n$.

Zeigen Sie $a_n = \dfrac{n!(n+2)!4^n}{(2n)!}$.

(ii) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n.$$

Aufgabe 3:

Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen n und k gilt:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Aufgabe 4:

(i) Die Fibonacci-Zahlen f_k sind für $k \in \mathbb{N}_0$ durch

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$$

definiert.

(a) Bestimmen Sie f_2 bis f_7.

(b) Beweisen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$ f_{5k} durch 5 teilbar ist.
Zeigen Sie zunächst: für $k \geq 5$ ist $f_k = 5f_{k-4} + 3f_{k-5}$.

(ii) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{n+1} - 2$$