Stochastische Modellbildung aus unterschiedlichen Perspektiven

Von der Genueser Lotterie über Urnenaufgaben zur Keno Lotterie

ANDREAS BÜCHTER & HANS-WOLFGANG HENN, DORTMUND

Zusammenfassung: *Der Beitrag setzt sich anhand paradigmatischer Beispiele (*Genueser Lotterie*, Urnenaufgaben,* Keno Lotterie*) mit typischen Merkmalen stochastischer Modellbildung auseinander. Ausgehend von einleitenden Bemerkungen zur stochastischen Modellbildung werden Erfahrungen dargestellt, die die Autoren mit der* Genueser Lotterie *im Rahmen der universitären Lehramtsausbildung gemacht haben. Der offene Arbeitsauftrag, diese Lotterie zu analysieren, stellt sich als produktiver Lernanlass heraus und ruft fast zwangsläufig verschiedene Ansätze zur Modellbildung hervor. Diese verschiedenen Ansätze stehen für unterschiedliche Perspektiven auf die Situation. Ähnliche Phänomene lassen sich aus strukturellen Gründen bei klassischen Urnenaufgaben und der gerade erst in Deutschland zugelassenen* Keno Lotterie *finden. Mit den genannten Kontexten ist jeweils ein erhebliches Potenzial für die Gestaltung eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts verbunden, der sich an aktuellen fachdidaktischen Konzeptionen orientiert, der von den Phänomenen ausgeht und der mathematische Theoriebildung zum Ziel hat.*

1 Einleitung

Die polarisierende Wirkung und „*mäßige Beliebtheit von Stochastik im mathematischen Unterrichtsangebot*“ (Wickmann 1998, S. 47) muss in dieser Zeitschrift nicht ausführlich thematisiert werden. Dennoch möchten wir einige diesbezügliche Bemerkungen als Ausgangspunkt für unseren Beitrag nehmen. Als ein Grund für dieses Imageproblem wird das häufige Auftreten scheinbarer Widersprüche genannt: „*Auffallend viele Problemlösungen, die gemäß den Regeln der Wahrscheinlichkeitslehre gefunden werden, widersprechen der Intuition*“ (vgl. ebd.).

Andererseits charakterisiert *Hans Freudenthal* die Stochastik als „*Musterbeispiel [für] ... wirklichkeitsnahe und beziehungshaltige Mathematik*“ (Freudenthal 1973, S. 527), die geeignet ist, Lehrende wie Lernende für Mathematik zu begeistern: „*Daß man mit so simpler Mathematik in der Wahrscheinlichkeitsrechnung so viel und vielerlei erreichen kann, spricht für die Mathematik (und für die Wahrscheinlichkeitsrechnung)*“ (ebd., S. 528).

Die Gründe für Sympathie oder Antipathie gegenüber Stochastik wurzeln häufig in ein und derselben Eigenschaft der stochastischen Modellbildung: Zwar kann mit „*simpler Mathematik*“ viel erreicht werden, aber häufig ist völlig offen, wie diese simple Mathematik eingesetzt werden muss. In der Schule und in den Übungen für Studierende ergeben sich daraus zwei typische Arten von Lehr-Lernsituationen (vgl. Büchter 2004):

(A) Verschiedene Lösungsansätze zu einem Problem erscheinen gleichermaßen plausibel, führen aber zu unterschiedlichen Ergebnissen.

(B) Unterschiedliche Lösungsansätze zu einem Problem führen zum gleichen Ergebnis. Dabei ist zunächst völlig unklar, warum dies so ist.

Heinrich Winter hat in seinem Beitrag „*Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien*“ (Winter 1992) aufgezeigt, wie solche Paradoxien und Merkwürdigkeiten zwecks Verbesserung der Intuition didaktisch gewendet werden können. In *Winters* Ansatz spielen heuristische Strategien, die er in bewusster Anlehnung an *Polya* definiert, eine zentrale Rolle bei der „*intuitiven Aufklärung*“ (vgl. ebd., S. 29 ff.).

Im folgenden Abschnitt 2 stellen wir mit der *Genueser Lotterie* einen Kontext vor, der entsprechendes Potenzial für die Verbesserung der Intuition und für eine stochastische Begriffsbildung von den Phänomenen aus hat.

Bei der Thematisierung dieser Lotterie lassen sich typische Probleme und qualitativ unterschiedliche Ansätze zur stochastischen Modellbildung identifizieren. Diese können produktiv für die Gestaltung von Lehr-Lernsituationen genutzt werden. Darauf gehen wir im Abschnitt 3, der didaktischen Reflexion, detaillierter ein.

Schließlich stellen wir in Abschnitt 4 mit klassischen Urnenaufgaben und der *Keno Lotterie* weitere Kontexte dar, die ein ähnliches Potenzial wie die *Genueser Lotterie* für die Unterrichtsentwicklung haben.

In Abschnitt 5, dem Ausblick, formulieren wir Forschungsfragen zur stochastischen Modellbildung, die sich aufgrund dieses Beitrags ergeben, und mögliche Untersuchungsansätze.

2 Die *Genueser Lotterie* als produktive Übung

Die *Genueser Lotterie* hat ihren Ursprung in der genuesischen Senatorenwahl, die 1575 nach einem Staatsstreich eingeführt wurde (vgl. Krätz/Merlin 1995, S. 65). Aus einer Liste von 90 Bürgern wurden fünf zur Ergänzung des Großen Rates der Stadt in den Senatorenstand erhoben. Aus unterschiedlichen Wetten darauf, welche Bürger in den Senatorenstand erhoben werden würden, hat sich in Italien bis zum Jahre 1643 eine Lotterie entwickelt. Diese *Genueser Lotterie* war auch Vorbild für eine Lotterie, die der venezianische Abenteurer *Giacomo Casanova* 1758 in Frankreich einführte (Childs 1977, S. 92 f.).

„Bei dieser Lotterie wurden aus neunzig Losnummern fünf Gewinnzahlen gezogen. Die Teilnehmer konnten eine Zahl, zwei Zahlen (Ambe) oder drei Zahlen (Terne) tippen. Eine gezogene Einzelnummer brachte das Fünfzehnfache des Einsatzes, zwei Zahlen das Zweihundertsiebzigfache und bei drei Richtigen bekam man das 5.200fache des eingezahlten Betrages.“ (Childs 1977, S. 94).

Variante	I	II (Ambe)	III (Terne)
Getippte Zahlen	1	2	3
Ziehung	Aus 90 Kugeln werden 5 gezogen		
Auszahlung	15fach	270fach	5 200fach

Tabelle 1: Spielvarianten der *Genueser Lotterie*

Auf den ersten Blick handelt es sich bei dieser Lotterie um ein Glücksspiel, das in dieser oder einer ähnlichen Form eine Standardaufgabe für Stochastikunterricht oder Übungen zu Stochastikvorlesungen darstellt.

Für Personen, die über reichlich Erfahrung in stochastischer Modellbildung verfügen, stellt dieser Kontext in der Regel auch keine besondere Herausforderung dar. Anders sieht es bei Lernenden aus, die noch über wenig Erfahrung in der Anwendung stochastischer Methoden verfügen. Für sie erweist sich die Modellierung dieser Lotterie als tückisch (vgl. Büchter 2004). Dies wird im Folgenden genauer dargestellt.

2.1 Erste Modellierungen der *Genueser Lotterie*

Die beiden Autoren haben die *Genueser Lotterie* als Kontext für Übungsaufgaben im Rahmen der Veranstaltungen *„Einführung in die Stochastik“* und *„Didaktik der Stochastik“* genutzt. Die Zielgruppe dieser Veranstaltungen waren Lehramtsstudierende im Hauptstudium (für die Lehrämter Sekundarstufe I bzw. Primarstufe mit Schwerpunktfach Mathematik). Aus der Vorlesung waren zu diesem Zeitpunkt einfache Zufallsexperimente und die kombinatorischen Grundaufgaben, nicht jedoch Zufallsvariablen und deren Erwartungswerte bekannt. Einige Studierende verfügten über Erfahrungen in der Stochastik aus der gymnasialen Oberstufe, andere hatten hingegen kein vergleichbares Vorwissen. Die Studierenden erhielten in den Übungen den offenen Arbeitsauftrag, die *Genueser Lotterie* in Kleingruppen zu analysieren. In einem ersten Schritt sammelten sie Analysefragen, die danach im Plenum zusammengetragen wurden. Typische Fragen waren:

- „*Wie groß ist der Gewinn für den Staat?*“
- „*Wie viele Möglichkeiten gibt es, fünf aus 90 Zahlen zu ziehen?*“
- „*Welche Spielvariante lohnt sich mehr?*“
- „*Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn?*“
- „*Sind die Gewinnsummen proportional zu ihren Chancen?*“
- „*Wie müsste der Gewinnplan verändert werden, damit die Lotterie fair ist?*“
- „*Wie viele verschiedene Tipps gibt es?*“
- „*Dürfte diese Lotterie bei uns so zugelassen werden?*“

Eine genauere Betrachtung der Fragen zeigt, dass einige zwar unterschiedliche Erkenntnisinteressen formulieren, aber zu gleichen mathematischen Bearbeitungen führen. Die Beantwortung anderer Fragen wiederum bedarf normativer Zusatzannahmen (Was heißt fair? Wie viele Spieler nehmen insgesamt teil? Wie viele Spieler spielen welche Variante? etc.). Bis auf die Fragen nach den Anzahlen verschiedener Tipps bzw. Ziehungsergebnisse erfordert die Beantwortung der Fragen die Berechnung von Gewinnwahrscheinlichkeiten.

In den Übungen sollten die Kleingruppen sich Fragen auswählen, die sie bearbeiten wollten. Dabei konnte eine Frage von mehreren Gruppen gleichzeitig bearbeitet werden. In allen Kleingruppen begann die Auseinandersetzung mit den gewählten Fragen mit dem Versuch, Gewinnwahrscheinlichkeiten für die drei Spielvarianten zu bestimmen. Dabei ergab sich überwiegend der folgende Ansatz, der stark an Standardmodellierungen des Lottos „*6 aus 49*“ erinnert (hier dargestellt für die Spielvariante „*Terne*“):

$$P(Terne) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}08123\% \qquad \text{(I)}$$

Die Studierenden gingen dabei im Nenner *situationsnah* von der Anzahl der Möglichkeiten aus, fünf aus 90 Zahlen zu ziehen, orientierten sich also am Ziehungsprozess. Im Zähler verarbeiteten sie die Anzahl getippter Zahlen und die Anzahl gezogener Zahlen rechnerisch. Dabei wurde z. B. so argumentiert: „*Also drei Zahlen müssen unter den fünf gezogenen sein, dann bleiben noch zwei Zahlen über, die aus den restlichen 85 Zahlen stammen müssen.*"

Bei der Reflexion dieses Ansatzes wurde von anderen Studierenden die Frage aufgeworfen, wie sich dieser Ansatz von einem solchen unterscheidet, der eine fiktive Spielvariante modelliert, bei der fünf Zahlen getippt werden, von denen dann drei unter den gezogenen sind. Für diese fiktive Variante ergab sich die gleiche Formel. Es ist aber offensichtlich schwieriger, drei Zahlen zu tippen, die alle gezogen werden müssen, als fünf Zahlen zu tippen, von denen nur drei gezogen werden müssen. Daraufhin wurde versucht, den obigen Ansatz wie folgt zu retten:

$$P(Terne) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}00002\%$$

Aber auch die Reflexion dieses Rettungsversuchs führte zu Einwänden. Wenn dieser Ansatz richtig wäre, würde daraus rechnerisch folgen, dass es genauso schwer ist drei Zahlen richtig zu tippen, wie zwei Zahlen richtig zu tippen:

$$P(Terne) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}00002\%$$

Der bisherige Ansatz zur Modellierung der *Genueser Lotterie* hat also in eine Sackgasse geführt, an deren Ende die Studierenden nach den letzten Überlegungen angekommen waren.

Da der zunächst gewählte Ansatz (I) stark an die Modellierung beim Lotto „*6 aus 49*" erinnert, haben wir die Studierenden aufgefordert diese Modellierung explizit zu betrachten. Mit dieser Strategie – *Winter* nennt sie in seinem Beitrag „*Strategie 3 (Analogiebildung, Transfer)*" (Winter 1992, S. 33) – führt der Weg aus der Sackgasse heraus:

2.2 Erinnerung an das Lotto „*6 aus 49*"

Beim deutschen Lotto „*6 aus 49*" werden sechs Zahlen getippt und sechs Zahlen gezogen. Anders als bei der *Genueser Lotterie* stimmen die Anzahlen *gezogener* und *getippter* Zahlen also überein. Erst wenn die Zusatzzahl mitbetrachtet wird, werden sieben gezogene Zahlen und nur sechs getippte Zahlen betrachtet, was Lernenden häufig Schwierigkeiten bei der Modellierung bereitet.

Die Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit z. B. für die *Gewinnklasse VII* (drei richtige Zahlen von sechs getippten) findet beim Lotto „*6 aus 49*" üblicherweise wie folgt statt:

$$P(Gewinnklasse\ VII) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \approx 1{,}76504\%$$

Drei von den sechs getippten Zahlen müssen unter den sechs gezogenen sein, die anderen drei unter den 43 nicht gezogenen. Im Nenner stehen die Möglichkeiten sechs aus 49 Kugeln zu *ziehen* oder sechs aus 49 Zahlen zu *tippen* – das ist ja das Gleiche und auch dasselbe? Der Zähler hätte auch so begründet werden können: Drei von den sechs gezogenen Zahlen müssen unter den sechs getippten sein, die anderen drei unter den 43 nicht getippten.

Offensichtlich sind hier zwei Perspektiven verborgen, die zwei unterschiedliche Ergebnismengen zur Folge haben: *gezogene Zahlen* und *getippte Zahlen*. Solange die Anzahlen *gezogener* und *getippter* Zahlen gleich sind, führt eine Verwechslung der Perspektiven rechnerisch zu keinen Problemen, wohl aber, wenn diese Anzahlen sich – wie bei der *Genueser Lotterie* – unterscheiden. Auch beim Lotto „*6 aus 49*" treten dann Schwierigkeiten auf.

Möchte man z. B. die Gewinnwahrscheinlichkeit für die *Gewinnklasse V* (Vier Richtige mit Zusatzzahl) bestimmen, dann spielen *sieben gezogene* und *sechs getippte* Zahlen eine Rolle. Die Wahrscheinlichkeit lässt sich sowohl ausgehend von den *gezogenen Zahlen* (II) als auch ausgehend von den *getippten Zahlen* (III) bestimmen:

$$P(Gewinnkl.V) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{49}{6} \cdot \binom{43}{1}} \approx 0{,}00451\% \qquad \text{(II)}$$

$$P(Gewinnkl.V) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{42}{1}}{\binom{49}{6}} \approx 0{,}00451\% \qquad \text{(III)}$$

Bei der Perspektive auf die getippten Zahlen (III) ergibt sich die Ergebnismenge aus den Kombinationen „sechs aus 49“. Betrachtet man hingegen die gezogenen Zahlen (II), so ergibt sich die Ergebnismenge aus den um eine (aus 43 Zahlen gezogene) Zusatzzahl erweiterten Kombinationen „sechs aus 49“.

Für die Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit nach der Laplace-Regel „*Anzahl der günstigen Ergebnisse geteilt durch Anzahl der möglichen Ergebnisse*“ muss die gewählte Perspektive nun auch bei der Ermittlung der Anzahl der günstigen Ergebnisse beibehalten werden. Dies erweist sich für Lernende vielfach als schwierig.

Wird die Perspektive beibehalten, so wird in (III) für den Zähler argumentiert: Vier getippte Zahlen müssen unter den sechs gezogenen sein, eine muss die Zusatzzahl sein und eine ist unter den 42 nicht gezogenen Zahlen.

In (II) lautet die analoge Argumentation: Vier gezogene Zahlen müssen unter den sechs getippten sein, die anderen zwei gezogenen Zahlen müssen unter den 43 nicht getippten sein und die Zusatzzahl muss unter den beiden restlichen zwei getippten Zahlen sein.

Wenn man die beiden Perspektiven genauer betrachtet, so lässt sich feststellen, dass eine sehr *nah an der realen Situation* ist (II) und es sich bei der anderen (III) eher um ein *Gedankenexperiment* handelt.

Real geht eine Lotto-Spielerin in die Annahmestelle und gibt einen Tipp ab. Nun stehen sechs von ihr getippte Zahlen fest. Sie setzt sich am Samstagabend mit einer zuvor kaltgestellten Flasche Champagner vor den Fernseher und beobachtet das Zufallsexperiment „*Ziehung der Lottozahlen*“. Nacheinander werden sechs Zahlen und dann noch eine Zusatzzahl gezogen (später sogar noch eine Superzahl usw.). Die zugehörige Ergebnismenge besteht also aus den um eine (aus 43 Zahlen gezogene) Zusatzzahl erweiterten Kombinationen „sechs aus 49“ (II).

Das Gedankenexperiment zu (III) lautet: Irgendwelche sechs Zahlen und eine Zusatzzahl werden am nächsten Samstag gezogen („Der liebe Gott weiß welche, nur wir mit unseren beschränkten Erkenntnismöglichkeiten leider, leider nicht!“). Das Zufallsexperiment besteht nun im Tippen der Zahlen, von denen wir hoffen, dass sie uns Reichtum bringen.

Während sich (II) eher *an der Chronologie der Lotterie orientiert*, modelliert der Ansatz (III) die Situation *entgegen der realen Chronologie*. Unabhängig davon, welche Perspektive einem schlüssiger erscheint, hilft die Klärung der Perspektive auch bei der *Genueser Lotterie* aus der Sackgasse heraus.

2.3 Unterschiedlichen Perspektiven

Die folgenden drei Lösungsansätze wurden von Studierenden erarbeitet, nachdem die scheinbar ausweglose Situation unter Rückgriff auf das gewohnte Lotto „*6 aus 49*“ geklärt wurde. Dabei tauchten interessanterweise in allen Übungen die drei dargestellten Ansätze parallel auf und konnten verglichen und diskutiert werden. Betrachtet wird im Folgenden wiederum die Spielvariante „*Terne*“.

Wie beim ersten Ansatz (I) zur Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit wird in (IV) *situationsnah* die Ziehung der Zahlen als Zufallsexperiment modelliert. Die Perspektive auf die *gezogenen Zahlen* wird jetzt aber auch bei der Bestimmung der Anzahl der günstigen Ergebnisse durchgehalten:

$$P(Terne) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{11748} \approx 0{,}00851\% \qquad \text{(IV)}$$

Es werden fünf aus 90 Zahlen gezogen, so dass sich der Nenner als Anzahl möglicher Ergebnisse ergibt. Den Zähler erhält man, wenn man berücksichtigt, dass drei der gezogenen Zahlen eben den drei getippten Zahlen entsprechen und die anderen beiden gezogenen Zahlen unter den 87 nicht getippten Zahlen sein müssen. Eine andere Deutung lautet: Das Tippen *färbt* drei Kugeln aus einer Urne mit 90 Kugeln als persönliche Gewinnkugeln. Wie wahrscheinlich ist es nun, mit fünf Zügen ohne Zurücklegen diese drei Kugeln zu erwischen?

Der zweite regelmäßig verwendete Ansatz zur Modellierung der *Genueser Lotterie* betrachtet die möglichen und günstigen *getippten Zahlen*. In (V) wird also *entgegen der Chronologie* der Lotterie angenommen, die gezogenen Zahlen stünden fest und das Tippen sei das Zufallsexperiment:

$$P(Terne) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{90}{3}} = \frac{1}{11748} \approx 0{,}00851\% \qquad \text{(V)}$$

Es werden drei aus 90 Zahlen getippt, so dass sich der Nenner als Anzahl möglicher Tipps ergibt. Im Zähler wird berücksichtigt, dass die drei getippten Zahlen unter den fünf gezogenen Zahlen sein müssen. In der alternativen Deutungsweise würde dies heißen: Das spätere Ziehen *färbt* fünf Kugeln aus einer Urne mit 90 Kugeln als Gewinnkugeln. Wie wahrscheinlich ist es, mit dem Tippen von drei unterschiedlichen Zahlen (also Ziehen ohne Zurücklegen) drei dieser fünf Kugeln zu erwischen? Da die Anzahl der getippten Zahlen im Zähler *und* im Nenner berücksichtigt wird, unterscheiden sich hier – anders als beim Rettungsversuch zu Ansatz (I) – die Wahrscheinlichkeiten für *Terne* und *Ambe*.

Ein dritter, ebenfalls auftretender Ansatz zur Modellierung arbeitet direkt mit der alternativen Deutungsweise. In (VI) wird – wiederum *entgegen der Chronologie* der Lotterie – von einer Urne ausgegangen, in der 90 Kugeln liegen, von denen fünf Kugeln „Gewinnkugeln" sind. Der Prozess des *Tippens*, hier also des Ziehens von drei Kugeln ohne Zurücklegen, wird rechnerisch nachgebildet:

$$P(\mathit{Terne}) = \frac{5}{90}\cdot\frac{4}{89}\cdot\frac{3}{88} = \frac{1}{11748} \approx 0{,}00851\% \qquad \text{(VI)}$$

Für den ersten Tipp bzw. Zug aus der Urne ergibt sich die Chance, eine Gewinnkugel zu erwischen, aus dem Verhältnis von fünf Gewinnkugeln zu 90 Kugeln insgesamt. Analog erhält man die Chancen für den zweiten und dritten Zug, die entsprechend der Pfadmultiplikationsregel zur Gewinnwahrscheinlichkeit multipliziert werden.

Die Angabe der gekürzten Brüche und der Prozentwerte der Gewinnwahrscheinlichkeiten in (IV) – (VI) zeigt, dass die numerische Überprüfung der Ansätze zu gleichen Chancen führt (wie beruhigend!).

Diese Übereinstimmung der Lösungen kann also als gegenseitige *numerische Validierung* der Lösungsansätze gesehen werden. So lassen sich Studierende, die einen Ansatz bevorzugen und zunächst keine Einsicht für einen anderen Ansatz gewinnen, auch von der Tauglichkeit der anderen Ansätze überzeugen. Die Übereinstimmung der Gewinnwahrscheinlichkeiten lässt sich auch ohne Prozentwert direkt durch Rechnung mit den Binomialkoeffizienten zeigen:

$$P(\mathit{Terne}) = \frac{\binom{3}{3}\cdot\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{87\cdot 86}{2\cdot 1}}{\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}$$

$$= \frac{5\cdot 4\cdot 3}{90\cdot 89\cdot 88} = \frac{\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!\cdot 3!}}{\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87!}{3!\cdot 87!}} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{90}{3}} \qquad \text{(VII)}$$

2.4 Zusammenfassung der Erfahrungen

Die Thematisierung der *Genueser Lotterie* hat in aufeinander folgenden Semestern mit verschiedenen Studierenden immer wieder zu ähnlichen Situationen geführt, die also diesem Kontext gewissermaßen immanent zu sein scheinen. Dabei sind einige Situationen typisch für stochastische Modellbildung. Sie lassen sich den in Abschnitt 1 genannten Arten (A) und (B) von typischen Lehr-Lernsituationen in der Stochastik zuordnen und haben gemäß *Winters* dort zitiertem Ansatz Potenzial zur Verbesserung der (stochastischen) Intuition.

Im Folgenden werden die beobachteten typischen Situationen entsprechend der berichteten Chronologie des Lehr-Lernprozesses zusammengefasst. Eine weitergehende didaktische Reflexion der Beobachtungen findet in Abschnitt 3 statt.

Unreflektierter Kalkül

Dieser Aspekt ist keine Besonderheit der *Genueser Lotterie*, sondern typisch für viele Aufgaben im Mathematikunterricht bzw. in universitären Übungen. Es ist der Drang, mit den vorhandenen Zahlen möglichst direkt eine Lösung des Problems/der Aufgabe zu erreichen. Dafür werden die zur Verfügung stehenden Zahlen mit einem möglichst naheliegenden Rechenverfahren verarbeitet.

In Situationen, bei denen stochastische Methoden angewendet werden, wird dabei häufig übersehen, dass zunächst einmal eine geeignete Ergebnismenge die Grundlage der weiteren Arbeit sein muss. Im Prozess der mathematischen Modellierung stellt die Ergebnismenge eine erste mathematische Beschreibung der realen Situation dar.

Anwendung heuristischer Strategien

Wenn erst einmal Lösungen vorgeschlagen werden, dann wird versucht, diese Vorschläge zu bewerten. In den Übungen mit Lehramtsstudierenden wurden zunächst Vorschläge wie (I) zur Ermittlung der Gewinnwahrscheinlichkeit für „*Terne*" an der Tafel präsentiert und anschließend diskutiert.

Beim Versuch, diese Lösungsansätze zu bewerten, verwendeten andere Studierende vor allem die heuristische Strategie der *Pointierung* oder *Kontrastbildung* an (vgl. Winter 1992, S. 33). Dafür wurden Überlegungen zu ähnlichen, aber nicht gleichen Situationen angestellt, die zu demselben Ergebnis führen. Da dies aufgrund von Plausibilitätsüberlegungen nicht sein kann, wurde der Ansatz verworfen.

Eine andere Art des Einsatzes heuristischer Strategien ist die in Abschnitt 2.3 angesprochene *numerische Validierung* der Lösungsansätze (IV) – (VI), die zwar keine strukturelle Einsicht in die Probleme verschafft, aber eine erste Akzeptanz alternativer Lösungswege. Dies schafft in der Regel Motivation, die alternativen Ansätze verstehen zu wollen. Generell spielt der Aspekt der *Validierung* in allgemeinen Modellen über mathematische Modellbildung eine wichtige Rolle (vgl. Blum 1996; Schupp 1988).

Unterschiedliche Perspektiven

Ganz offensichtlich handelt es sich bei den drei in Abschnitt 2.3 dargestellten Lösungsansätzen (IV) – (VI) um Modellierungen der *Genueser Lotterie* aus unterschiedlichen Perspektiven bzw. mit unterschiedlichen Foki.

So nimmt Ansatz (IV) *entsprechend der Chronologie* der Lotterie die Ziehung der fünf Zahlen als Zufallsexperiment in den Blick. In der alternativen Deutung hieß dies, dass das Tippen *drei* Kugeln färbt.

Die Ansätze (V) und (VI) betrachten dagegen *entgegen der Chronologie* der Lotterie das Tippen der drei Zahlen als Zufallsexperiment, also *färbt* das Ziehen fünf Kugeln. Dabei werden im Ansatz (V) die Anzahlen günstiger und möglicher Tripel für die Bestimmung der Gewinnwahrscheinlichkeit nach der Laplace-Regel abgezählt, während im Ansatz (VI) eher der Prozess des drei mal hintereinander stattfindenden Auswählens jeweils einer Zahl rechnerisch nachgebildet wird.

Jeder Ansatz ist für sich schlüssig. Aus didaktischer Perspektive ist keiner zu bevorzugen. Alle drei Ansätze taugen zur Modellierung der *Genueser Lotterie* und sind auch für denkbare Verallgemeinerungen, wie z. B. die *Keno Lotterie* in Abschnitt 4.2, sinnvoll.

In den Übungen konnte aber festgestellt werden, dass es für Studierende, die einen Ansatz selbst entwickelt hatten, schwierig war, sich auf die Denkweise eines anderen Ansatzes einzulassen. Sie waren sozusagen in dem Gedankengebäude ihres Ansatzes gefangen. In den Übungen wurde dementsprechend viel Zeit für den Vergleich und die Diskussion der verschiedenen Ansätze verwendet.

Die Kraft der Ergebnismengen

Bei der Klärung der Perspektiven anhand des Lottos „*6 aus 49*“ spielte die Frage, was als Zufallsexperiment betrachtet wird, eine entscheidende Rolle. Durch die explizite Angabe der Ergebnismengen konnten die verschiedenen Perspektiven für die *Gewinnklasse V* (Vier Richtige mit Zusatzzahl) beim Lotto auseinander gehalten werden. Wer die *Ziehung* der Lottozahlen als Zufallsexperiment betrachtet, nutzt in der mathematischen Beschreibung eine geeignete Menge von 7-Tupeln als Ergebnismenge. Hierin werden die günstigen und alle möglichen Ergebnisse abgezählt. Wer das *Tippen* der Zahlen als Zufallsexperiment in den Blick nimmt, geht von 6-Tupeln aus.

Die Explizierung einer Ergebnismenge erscheint hier direkt für den Lösungsprozess sinnvoll und nicht nur als bloßer Formalismus. Vor allem für die Diskussion der verschiedenen Lösungsansätze ist diese Explizierung wichtig, da sie die Grundlage für die weitere Verständigung über die Ansätze bildet.

Diskussion der Ansätze

Wenn die drei Ansätze (IV) – (VI) einmal, von Studierenden präsentiert, an der Tafel stehen, entsteht fast zwangsläufig eine rege Diskussion („*Ist ein Ansatz besser?*“ „*Warum ist ein anderer Ansatz auch brauchbar?*“ „*Handelt es sich hier um eine Besonderheit der konkreten Situation?*“).

Der numerische Vergleich von (IV) – (VI) oder der rechnerische Vergleich der drei Ansätze in (VII) überzeugt zunächst alle Beteiligten von der Tauglichkeit der verschiedenen Ansätze. Dennoch ist ein Standpunktwechsel zunächst für die meisten Studierenden schwierig. Damit einher geht der Drang nach Einsicht. Die eher theoretische, strukturelle Frage nach dem „*Warum?*“ wird plötzlich attraktiv – ganz im Sinne *Freudenthals* „*Didaktischer Phänomenologie der Begriffe*“ (*Freudenthal* 1983).

2.5 Das Potenzial der *Genueser Lotterie*

Die dargestellten Aspekte der Analyse der *Genueser Lotterie* lassen sie als Kontext für produktives Üben sehr reizvoll erscheinen. Eine intensive Behandlung der von den Studierenden aufgestellten Analysefragen geht aber weiter. Zum einen führt die Analyse der Lotterie fast zwangsläufig zu einer intuitiven Erwartungswertbildung („*Wie groß ist der Gewinn für den Staat?*“), zum anderen können wichtige Aspekte mathematischer Modellbildung, insbesondere normative Aspekte („*Welche Spielvariante lohnt sich mehr?*“), thematisiert werden.

Intuitive Erwartungswertbildung

Bei der Bearbeitung einer Frage wie „*Wie groß ist der Gewinn für den Staat?*“ wird auf ganz natürlichem Weg das Konzept des *Erwartungswertes intuitiv entwickelt*. Zunächst lässt sich dies nur getrennt für die drei Spielvarianten durchführen. Bei der bereits intensiv betrachteten Variante „*Terne*“ haben die Studierenden in der Übung ausgehend vom Bruch $\frac{1}{11748}$ in einer der Berechnungen (IV) – (VI) den Erwartungswert wie folgt entwickelt:

Angenommen 11 748 Spieler beteiligen sich an der Lotterie, jeder setzt einen Francs ein und alle tippen unterschiedlich (zum damaligen Wert des Francs folgt eine Anmerkung am Ende des Textes). Wenn alles „normal“ verläuft gewinnt ein Spieler und erhält 5 200 Francs ausbezahlt. Dabei wird unter einem „normalen“ Verlauf verstanden, dass auf lange Sicht eben einer von 11 748 möglichen Tipps gewinnen wird. In diesem Ansatz steckt also eine Interpretation des *empirischen Gesetzes der großen Zahlen*, die für sich wieder Anlass zur Reflexion gibt. Der Staat macht in dieser Denkweise und bei diesen Annahmen also, wenn alles „normal“ verläuft, auf lange Sicht bei der Spielvariante „*Terne*“ 11 748 – 5 200 = 6 548 Francs Gewinn.

Für die beiden anderen Spielvarianten ergeben sich analog die folgenden Gewinnwahrscheinlichkeiten:

$$P(Ambe) = \frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{2}{801} \approx 0{,}24969\,\% \qquad \text{(VIII)}$$

$$P(Variante\,I) = \frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{18} \approx 5{,}55556\,\% \qquad \text{(IX)}$$

Analog zu den Überlegungen für die Variante „*Terne*“ ergibt sich für „*Ambe*“, dass bei 801 Spielern, die je einen Francs einsetzen und verschieden tippen, der Staat $801 - 2\cdot 270 = 261$ Francs Gewinn macht. Bei der „*Variante I*“ ergibt sich bei 18 solchen Spielern ein Gewinn von $18 - 1\cdot 15 = 3$ Francs für den Staat. In einer Gegenüberstellung ergibt sich folgende Tabelle:

Variante	**I**	**II (Ambe)**	**III (Terne)**
Absoluter Gewinn	3 Francs	261 Francs	6 548 Francs
Spieler	18	801	11 748

Tabelle 2: Erste (absolute) Gewinnüberlegungen

Da bei der Analyse der Spielvarianten das Ziel im Vordergrund steht, die Varianten untereinander zu vergleichen, ist das Problem dieser Gegenüberstellung offensichtlich: Es wird von unterschiedlichen Spielerzahlen ausgegangen. Ebenso ist offensichtlich, wie die notwendige Abhilfe aussieht: In den Übungen schlugen die Studierenden direkt die Relativierung der anhand konkret angenommener Spielerzahlen ermittelten Gewinne für den Staat an eben diesen Spielerzahlen vor. Es wurde also der Gewinn des Staats pro Spieler berechnet.

Daraus ergibt sich die folgende Gegenüberstellung (die Gewinnwahrscheinlichkeiten sind aus Gründen der Vollständigkeit zusätzlich angegeben):

Variante	**I**	**II (Ambe)**	**III (Terne)**
Gewinn-wahrsch.	5,55556 %	0,24969 %	0,00851 %
Spieler	18	801	11 748
Absoluter Gewinn	3 Francs	261 Francs	6 548 Francs
Relativer Gewinn	0,17 Francs	0,36 Francs	0,56 Francs

Tabelle 3: Vergleich der drei Spielvarianten

Aus Sicht des Staats ist also die Spielvariante „*Terne*“ die lohnendste, wenn alles normal läuft. Dies ist zugleich die Spielvariante, die aufgrund der möglichen hohen Auszahlung Spieler anlocken kann. Auf jeden Fall sind die Chancen und Gewinnerwartungen in den drei Spielvarianten sehr unterschiedlich.

Die dargestellten Überlegungen zur *intuitiven Erwartungswertbildung* führten in den Übungen direkt durch anschließende Betrachtung auf die bekannte standardisierte Darstellung des Erwartungswertes. Des Weiteren ergibt sich direkt, dass der Erwartungswert für einen Spieler, der sich für eine Spielvariante entscheidet, das Negative des Erwartungswertes für den Staat sein muss. Denn außer diesen beiden Parteien gibt es keine weiteren am Spiel beteiligten, in der Summe fließt also kein Geld zu oder ab.

Bei einer späteren systematischen Einführung des Erwartungswertes im Zusammenhang mit Zufallsgrößen konnte direkt auf diese natürlichen Überlegungen angeknüpft werden.

Normative Aspekte der Modellierung

Das Anwenden stochastischer Methoden auf reale Situationen wird häufig als mathematische Modellbildung par excellence angesehen (vgl. z. B. in Abschnitt 1 das einleitende Freudenthal-Zitat). Bei der Beschreibung realer Situationen mit Mitteln der Mathematik, der anschließenden Erarbeitung von Problemlösungen mit mathematischen Methoden, der Interpretation der Ergebnisse und der Validierung des in diesem Prozess gebildeten Modells spielen *normative Aspekte* eine für den Mathematikunterricht ungewohnt starke Rolle (vgl. Blum 1996; Schupp 1988).

Bereits in der *intuitiven Erwartungswertbildung* im vorangehenden Abschnitt stecken normative Annahmen. So wird davon ausgegangen, dass sich die Gewinnerwartung für den Staat so verhält wie die theoretische Gewinnwahrscheinlichkeit für die jeweilige Spielvariante. Aufgrund dieser Annahme von „Normalität" entsprechend dem *empirischen Gesetz der großen Zahlen* wird der Gewinn abgeschätzt.

Dabei könnten in einer konkreten Ausspielung der Lotterie theoretisch ein Zehntel aller teilnehmenden Spieler die Variante „*Terne*" und dort z. B. die Zahlen 11, 12, 13 gewählt haben. Der Gewinnplan der Lotterie sieht für diese Spieler im Falle des Erfolgs eine feste Gewinnquote, nämlich das 5 200fache des Einsatzes, vor. Bei dieser Lotterie könnte also „die Bank gesprengt" werden, wenn nicht alles „normal" verläuft. Die Gewinnverteilung beim Lotto „*6 aus 49*" läuft anders ab: 50 % der Einnahmen werden nach einem feststehenden Schlüssel auf die Gewinnklassen verteilt.

Wenn nun die erste Analysefrage „*Wie groß ist der Gewinn für den Staat?*" weiter bearbeitet wird, fällt auf, dass für ihre Beantwortung alleine die Erwartungswerte für die drei Spielvarianten nicht ausreichen. Wenn man sich für den zu erwartenden absoluten Gewinn, den der Staat als zusätzliche Einnahme für seinen Haushalt verbuchen kann, interessiert, müssen Zusatzinformationen vorliegen oder es müssen Zusatzannahmen getroffen werden. Diese normativen Akte bestehen in der Festlegung, wie viele Spieler sich mit welchen Einsätzen an der Lotterie beteiligen und welche Anteile von ihnen sich für welche Variante entscheiden.

In der folgenden Beispielrechnung gehen wir von 100 000 Spielern aus, die durchschnittlich zwei Francs einsetzen. 50 000 spielen die Variante „Terne", 20 000 die Variante „Ambe" und 30 000 die „Variante I". Aufgrund der relativen Erwartungswerte in Tabelle 3 ergibt sich als Gewinnerwartung für den Staat, wenn alles „normal" verläuft:

Absoluter Gewinn

$$= 50000 \cdot 0{,}56 \cdot 2 + 20000 \cdot 0{,}36 \cdot 2 + 30000 \cdot 0{,}17 \cdot 2$$

$$= 80600$$

Bei den getroffen Annahmen über Spielerzahlen, Spielverhalten und „Normalität" des Verlaufs würde der Staat also 80 600 Francs Gewinn machen. Dies entspräche 0,81 Francs pro Spieler.

Wenn der Staat mit Einnahmen aus der Lotterie rechnet, ist für den Finanzminister nicht nur der Erwartungswert wichtig. Er sollte auch die mögliche Streuung der Einnahmen berücksichtigen, um mögliche Abweichungen nach unten antizipieren zu können. Falls er den Erwartungswert im Haushaltsplan fest verbucht hat und auf ihn angewiesen ist, würde jede Abweichung nach unten höchstens die Opposition freuen. Demnach können sich Betrachtungen zur Streuung auf natürliche Weise anschließen. Diese werden hier aber nicht weiter vertieft.

Bei den Überlegungen zum Gewinn des Staates gehen Annahmen ein, welcher Anteil der Spieler welche Spielvariante wählt. In der realen Situation hängt dies auf Seiten der Spieler mit der Analysefrage „*Welche Spielvariante lohnt sich mehr?*" zusammen. Nach den Zahlen von Tabelle 3 ist diese Überlegung scheinbar klar: Die Gewinnerwartung für den Staat ist bei Spielvariante „*Terne*" am höchsten, die Verlusterwartung für den Spieler also auch. Demnach müssten alle Spieler „*Variante I*" wählen. Dennoch kann es *subjektiv* für viele Spieler sinnvoll sein, die Variante „*Terne*" zu spielen.

Genauso, wie es subjektiv sinnvoll sein kann, Lotto zu spielen, obwohl die Mathematiker sagen: „Beim Lotto gewinnt nur der Staat". Wenn ich Woche für Woche für zwei Euro Lotto spiele, habe ich die theoretische Chance auf einen Reichtum, den ich sonst nie erlangen könnte. Insbesondere würde ich mit dem wöchentlichen Sparen der zwei Euro, die ich „so gerade eben über habe", niemals wohlhabend werden. Die Frage, *was sich lohnt*, kann also *ausschließlich* durch den Spieler *subjektiv* beantwortet werden. Die Stochastik kann ihm höchstens helfen, eine subjektive Entscheidung auf rechnerischer Grundlage zu treffen.

Noch deutlicher als bei der Frage, wie groß der Gewinn für den Staat ist oder welche Spielvariante sich mehr lohnt, spielen normative Aspekte bei den Analysefragen

- „*Wie müsste der Gewinnplan verändert werden, damit die Lotterie fair ist?*"
- „*Dürfte diese Lotterie bei uns so zugelassen werden?*"

eine wichtige Rolle. Die Frage, wann eine staatliche Lotterie „fair" ist, kann nicht alleine mathematisch beantwortet werden. Z. B. ist die Festlegung, „fair" möge bedeuten, dass der Erwartungswert für den Gewinn des Staates Null betragen soll, ein höchst normativer Akt. Und bei der Frage, ob die *Genueser Lotterie* bei uns so zugelassen werden dürfte, spielen aktuelle Rechtsnormen die entscheidende Rolle neben der Stochastik. Tatsächlich dürfte sie zugelassen werden, da jede Spielvariante eine Ausschüttung von mehr als 30 % des Einsatzes vorsieht, was der Forderung über die Gewinnausschüttung in § 9 des aktuellen *Staatsvertrags zum Lotteriewesen in Deutschland* entspricht.

3 Didaktische Reflexion

Die in Abschnitt 2 dargestellten und zusammengefassten Erfahrungen mit dem Einsatz der Genueser Lotterie in Übungen für Lehramtsstudierende werden in diesem Anschnitt didaktisch reflektiert. Dabei stehen die typischen Aspekte dieser Lotterie stellvertretend für typische Merkmale stochastischer Modellbildung.

In Abschnitt 3.1 werden sie bezüglich der möglichen angestoßenen kognitiven Prozesse bei den Lernenden betrachtet. In Abschnitt 3.2 werden diese Aspekte und ihr mögliches Potenzial für die Unterrichtsentwicklung vor dem Hintergrund aktueller mathematikdidaktischer Konzepte von „gutem Mathematikunterricht" bewertet (vgl. Borneleit/-Danckwerts/Henn/Weigand 2001; Biermann/Blum 2002).

Die weiter unten in den Abschnitten 4.1 und 4.2 dargestellten „rich contents" sind bezüglich der für die Gestaltung von Unterrichtsprozessen relevanten Aspekte mit der Genueser Lotterie vergleichbar und bieten daher ähnliches Potenzial.

3.1 Perspektiven und Denkweisen

In Abschnitt 2.3 wurde dargestellt, dass sich in den Übungen stets drei alternative Lösungsansätze (IV) – (VI) ergeben haben. Sie sind mit unterschiedlichen Perspektiven bzw. Fokussierungen auf das Problem verbunden. Beim Lösungsansatz (IV) wurde *nah an der realen Situation*, dem Tippen und anschließenden Ziehen der Gewinnzahlen modelliert. Diese Nähe zur realen Situation wurde bei (V) und (VI) aufgegebenen. Dort wurde *entgegen der Chronologie* der *Genueser Lotterie* in einem Gedankenexperiment das Tippen der Zahlen als Zufallsexperiment betrachtet.

Dabei war der Ansatz (V) mit der einschrittigen Anwendung der Laplace-Regel verbunden. Hierfür wurde stärker die *Struktur* der Ergebnismenge betrachtet, nämlich die Gesamtzahl möglicher Ergebnisse und die für einen Gewinn günstigen Ergebnisse. Diese einschrittige Anwendung der Laplace-Regel ist wiederum analog zum Ansatz (IV). Im Ansatz (VI) orientierte sich die Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit stärker am *Prozess* des Tippens. Nacheinander werden drei Zahlen getippt. Für jeden dieser drei Tipps gibt es eine eigene Wahrscheinlichkeit „richtig zu liegen". Diese wurde gemäß der Pfadregel multipliziert.

Es lassen sich nach diesen Ausführungen also unter anderem zwei Unterscheidungen für die verschiedenen Modellierungsprozesse treffen. Erstens können Modellierungen in *situationsnah* (Ansatz (IV)), d. h. gemäß der Chronologie der Lotterie, und in *abstrakt* (Ansätze (V) und (VI)) unterschieden werden. Dabei liegt die Abstraktion hier in dem zugrunde liegenden Gedankenexperiment. Zweitens lassen sich eher *strukturorientierte* (Ansätze (IV) und (V)) und eher *prozessorientierte* Modellierungen unterscheiden (Ansatz (VI)).

In einer „Vierfeldertafel" mit diesen Unterscheidungen bleibt damit ein Feld frei, zu dem sich in den Übungen kein Lösungsansatz beobachten ließ:

	situationsnah	**abstrakt**
strukturorientiert	(IV)	(V)
prozessorientiert	—	(VI)

Tabelle 4: Unterscheidungen von Modellierungen

Damit stellt sich zwangsläufig die Frage, ob das freie vierte Feld auch besetzt werden könnte und wie ein entsprechender Ansatz aussähe. Da *situationsnah* und *prozessorientiert* modelliert werden soll, liegt es nahe, eine Urne als Modell zu nehmen, in der 90 Kugeln liegen, von denen drei durch das Tippen als Gewinnkugeln gefärbt sind. Aus dieser Urne wird fünfmal gezogen. In drei der fünf Züge muss eine Gewinnkugel gezogen werden. Damit ergibt sich als eine *situationsnahe* und *prozessorientierte* Berechnung (wiederum für „*Terne*"):

$$P(Terne) = \binom{5}{3} \cdot \frac{3}{90} \cdot \frac{2}{89} \cdot \frac{1}{88} \cdot \frac{87}{87} \cdot \frac{86}{86} \qquad \text{(X)}$$

Wiederum kann durch einen numerischen oder rechnerischen Vergleich gezeigt werden, dass dieses Ergebnis mit denen der anderen Lösungsansätze übereinstimmt. Warum der Lösungsansatz (X) in den Übungen nicht beobachtet werden konnte, muss ein Stück weit offen bleiben. Es konnte eine gewisse Dominanz der Ansätze, die mit Binomialkoeffizienten arbeiten, beobachtet werden. Möglicherweise hängt dies mit zuvor in den Veranstaltungen thematisierten Inhalten, also den Lernerfahrungen der Studierenden, zusammen.

Insgesamt ergibt sich zusammen mit dem Lösungsansatz (X) die folgende ergänzte Tabelle:

	situationsnah	**abstrakt**
strukturorientiert	(IV)	(V)
prozessorientiert	(X)	(VI)

Tabelle 5: Ergänzung von Tabelle 4

In den Übungen konnte beobachtet werden, dass die Studierenden Schwierigkeiten hatten, sich auf die Denkweisen der von ihnen nicht gewählten Lösungsansätze einzulassen.

Dies kann darauf hindeuten, dass sich bei den unterschiedlichen Perspektiven und darin resultierenden Ansätzen qualitativ unterschiedliche kognitive Prozesse bei den Lernenden abspielen. Diese können z. B. für verschiedenen Denkstile stehen. So könnte die hier getroffene Unterscheidung in *strukturorientiert* und *prozessorientiert* mit der Unterscheidung von *prädikativem* und *funktionalem* Denken korrespondieren (vgl. Schwank 1996). Zur Erhärtung dieser Vermutungen wäre eine detailliertere qualitative und quantitative empirische Studie notwendig.

Es wird aber unter Annahme dieser Korrespondenz die Notwendigkeit klar, dass bei einer Aufgabe wie der Analyse der *Genueser Lotterie* verschiedene Denkweisen und Perspektiven thematisiert werden müssen. Sonst werden einzelne Lernende, deren Ansätze nicht thematisiert werden, in gewisser Hinsicht vom Unterrichtsprozess ausgeschlossen.

3.2 Potenzial für Unterrichtsentwicklung

Nimmt man aktuelle mathematikdidaktische Konzepte von „gutem Mathematikunterricht" (vgl. Borneleit/Danckwerts/Henn/Weigand 2001; Biermann/Blum 2002) als Referenzrahmen, dann scheint die *Genueser Lotterie* in mehrfacher Hinsicht gut geeignet zu sein für die Gestaltung produktiver Lehr-Lernsituationen.

Verbunden mit dem offenen Analyseauftrag stellt die Lotterie eine differenzierende, offene Aufgabe dar, die die Lernenden durchweg kognitiv aktiviert, die unterschiedliche Lösungen auf unterschiedlichen Niveaus zulässt und die eine metakognitive Reflexion der Lösungsprozesse nahe legt. Der Aspekt der Differenzierung wird dabei durch den offenen Analyseauftrag erreicht. So können die Kleingruppen an selbstgewählten Analysefragen arbeiten und bei der Auswahl der Fragen auch das von ihnen Leistbare berücksichtigen.

In ihrer Expertise „*Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe*", deren Empfehlungen in weiten Teilen auch für die Sekundarstufe I sinnvoll sind, beschreiben Borneleit/Danckwerts/Henn/-Weigand die sogenannte „*japanische Unterrichtsmethode ... als äußerst konstruktiv und produktiv*" (2001, S. 47). Sie zeichnet sich durch vier typische Phasen aus (vgl. ebd.):

1. Phase Auftragsübergabe
2. Phase Selbständig-produktives Erschließen
3. Phase Präsentation
4. Phase Besprechung

In der Darstellung der Erfahrungen mit der *Genueser Lotterie* im Einsatz in der universitären Lehrerbildung (Abschnitt 2) lassen sich diese Phasen gut verorten. Dass die Lehr-Lernsituation sich so gestalten lässt, hängt mit Merkmalen der Aufgabenstellung wie Differenzierung, Offenheit und Vorhandensein unterschiedlicher Lösungen zusammen.

In ihrem Konzept „*Gute Unterrichtspraxis Mathematik*" stellen Biermann/Blum (2002) Merkmale dar, von denen ein ergebniseffektiver Unterricht möglichst viele erfüllen sollte. Hierbei wird u. a. Wert auf die permanente kognitive Aktivierung der Lernenden und die Reflexion der Lösungsprozesse („*metakognitive Aktivitäten*") gelegt (vgl. ebd.). Gerade für eine Reflexion der Lösungsprozesse ist das Vorhandensein unterschiedlicher Ansätze kaum ersetzbar. Unterschiedliche Ansätze fordern direkt zum Vergleich und zur Bewertung dieser Ansätze heraus.

Die zahlreichen normativen Aspekte bei der Bearbeitung von möglichen Analysefragen (vgl. zweiter Punkt in Abschnitt 2.5) bieten ebenfalls Anlass zur Reflexion und thematisieren mit dem *Modellieren* eine prozessbezogene Kompetenz. Die Bedeutung des Modellierens für den Mathematikunterricht wird nicht zuletzt in der PISA-Rahmenkonzeption hervorgehoben (vgl. Klieme/-Neubrand/Lüdtke 2001).

Neben diesen Aspekten der Gestaltung produktiver Lehr-Lernsituationen enthält die *Genueser Lotterie* das Potenzial zur mathematischen Begriffsbildung von den Phänomen aus. Die *intuitive Erwartungswertbildung* (erster Punkt in Abschnitt 2.5) geht im Sinne *Freudenthals „Didaktischer Phänomenologie der Begriffe*" (1983) von der realen Situation aus und entwickelt an ihr als paradigmatischem Beispiel die mathematischen Begriffe. In Abschnitt 2.5 (zweiter Absatz) wurde angedeutet, dass neben der durchgeführten *intuitiven Erwartungswertbildung* auch die Entwicklung eines geeigneten Streuungsmaßes im Aufgabenkontext angelegt ist.

4 Klassische und aktuelle „Rich contents"

Aufgrund des Potenzials der *Genueser Lotterie* für die Gestaltung eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts macht es Sinn, vergleichbare Kontexte für Aufgaben zu suchen, die ähnlich produktiv in Lehr-Lernsituationen genutzt werden können.

Im Folgenden werden zwei Aufgabenkontexte vorgestellt, die teilweise (Abschnitt 4.1) bzw. vollständig (Abschnitt 4.2) strukturgleich bzgl. der hier zentralen Aspekte sind. Dabei dürfte die Thematisierung von klassischen Kombinatorik- und Urnenaufgaben (Abschnitt 4.1) zunächst überraschen, da kontextfreie Urnenaufgaben häufig als einfallslose „graue" Standardaufgaben betrachtet werden. Aber bei ihnen sind wie bei der *Genueser Lotterie* häufig verschiedene Denkweisen und Perspektiven möglich.

Die verschiedenen Herangehensweisen müssen im Lehr-Lernprozess thematisiert werden und bieten gleichzeitig Gelegenheit zur Diskussion. Weniger überraschend dürfte die Thematisierung der *Keno Lotterie* (Abschnitt 4.2) sein. Sie ist im Prinzip strukturgleich zur *Genueser Lotterie* und daher auch für einen vergleichbaren Einsatz im Unterricht bzw. in Übungen hervorragend geeignet.

4.1 Kombinatorik- und Urnenaufgaben

Klassische Kombinatorik und Urnenaufgaben bieten ähnlich wie die *Genueser Lotterie* Ausgangspunkte für Lösungsprozesse aus unterschiedlichen Perspektiven bzw. mit unterschiedlichen Denkweisen.

Dies wird kaum sichtbar, wenn diese Standardaufgaben mit Standardlösungen versehen werden. Dann wird nicht nur das mögliche Potenzial der Aufgaben nicht ausgeschöpft, sondern es besteht auch die Gefahr, dass Lernende sich im gemeinsamen Lehr-Lernprozess mit ihren Überlegungen nicht wiederfinden. Für Lernende, die sich erstmals und aktiv-entdeckend mit solchen Aufgaben auseinandersetzen, gibt es noch keine Standardlösungen, und häufig entstehen kreative, mal mehr, mal weniger elegante Lösungen.

Ein erstes einfaches Beispiel hierzu ist die MISSISSIPPI-Aufgabe, eine Standardaufgabe der Kombinatorik:

> Wie viele verschiedene – nicht notwendigerweise sinnvolle – Wörter können aus den Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI gebildet werden?

Aufgabe: MISSISSIPPI

Zunächst weist diese Aufgabenstellung Interpretationsspielraum auf, um den es hier eigentlich nicht geht, der aber schon zu unterschiedlichen Bearbeitungen führen kann. Es ist nämlich unklar, ob die Anzahl der möglichen elfbuchstabigen Wörter gesucht ist oder die der möglichen *höchstens* elfbuchstabigen Wörter. Verschiedene Denkweisen bzw. Perspektiven können hingegen mit den beiden folgenden Berechnungen verbunden sein (jeweils für die Interpretation „mögliche elfbuchstabige Wörter“):

$$\textit{Anzahl Wörter} = \binom{11}{1} \cdot \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} = 34650 \quad \text{(XI)}$$

$$\textit{Anzahl Wörter} = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650 \quad \text{(XII)}$$

Diese beiden Ansätze führen wieder zum gleichen numerischen Ergebnis und lassen sich auch direkt rechnerisch vergleichen. Es überrascht erfahrene Stochastiker kaum, dass das gleiche Ergebnis herauskommt. Strukturell geht es nur um die Multinomialverteilung. Für Lernende, die diese Verteilung nicht kennen und solche Aufgaben ebenfalls kaum kennen, ist dies anders. Die Erklärungen, die von Studierenden für diese beiden Ansätze gegeben werden, lauten z. B. wie folgt:

(XI) „*Zunächst suche ich mir den Platz für das M aus, dann vier Plätze von den übrigen zehn für die I, dann vier von den übrigen sechs für die S und schließlich bekommen die P ihre zwei Plätze.*“

(XII) „*Das Wort MISSISSIPPI hat elf Buchstaben. Ich kann die Buchstaben auf 11! Arten neu ordnen. Dann muss berücksichtigt werden, dass unter den 11! Möglichkeiten 4! aufgrund der S nicht unterscheidbar sind, 4! aufgrund der I und 2! aufgrund der P.*“

Tatsächlich stecken hier unterschiedliche Denkweisen bzw. Perspektiven dahinter. Einmal werden die Buchstaben festgehalten, die Plätze ausgewählt und den Buchstaben zugeordnet (XI). Das andere Mal werden die Plätze festgehalten und die Buchstaben neu sortiert (XII). Wie bei den unterschiedlichen Lösungsansätzen zur *Genueser Lotterie* (Abschnitt 2.3) fällt es Studierenden, die eine Sichtweise eingenommen haben, häufig schwer, die andere nachzuvollziehen. Manche „grauen“ Standardaufgaben haben bei genauerem Hinsehen eben mehr Potenzial als man denkt!

Noch mehr Potenzial, weil mehr Lösungsansätze, als die MISSISSIPPI-Aufgabe hat folgende Standardaufgabe aus dem Reich der Urnen und Kugeln:

> Aus einer Urne mit 4 blauen, 3 roten, 7 weißen und 6 grünen Kugeln wird ohne Zurücklegen gezogen. Wie wahrscheinlich ist es,
>
> a) im ersten Zug eine rote Kugel und im zweiten Zug eine blaue Kugel zu ziehen?
>
> b) dass im elften Zug eine rote Kugel gezogen wird?

Aufgabe: Urne a) und b)

Die Teilaufgabe a) kann wie die MISSISSIPPI-Aufgabe relativ leicht direkt gelöst werden, lässt aber genauso unterschiedliche Herangehensweisen zu. Zunächst werden zwei diskutiert, die sich von der Denkweise her unterschieden. Im ersten Fall (XIII) wird *prozessorientiert* argumentiert.

Die Chance, im ersten Zug eine rote Kugel zu ziehen, wird mit der Chance, im zweiten eine blaue Kugel zu ziehen, gemäß der Pfadregel multipliziert. Die passende Visualisierung dazu ist ein Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten an den Ästen:

$$P(1.\,Zug\,rot \wedge 2.\,Zug\,blau) = \frac{3}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{12}{380} \qquad \text{(XIII)}$$

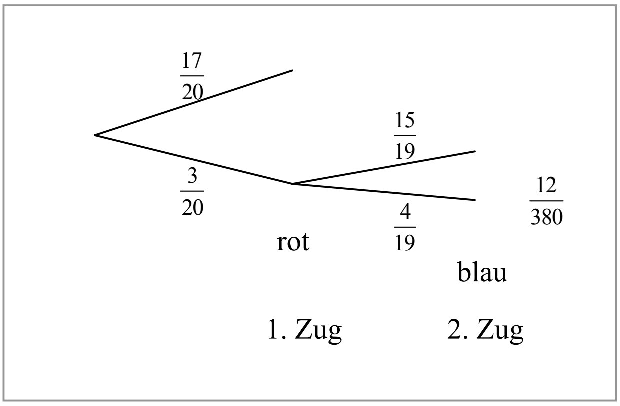

Abbildung 1: Baumdiagramm zu (XIII)

Die zweite Argumentation ist eher *strukturorientiert*. Die beiden ersten Züge aus der Urne werden als Zufallsexperiment „*Ziehen von zwei Kugeln mit einem Griff*" modelliert. Die Ergebnismenge besteht aus allen möglichen Paaren (1. Zug | 2. Zug). Wenn die 20 Kugeln als unterscheidbar betrachtet werden (es sind ohnehin physisch verschiedene Objekte), ist der Laplace-Ansatz für diese Ergebnismenge sinnvoll.

Da ohne Zurücklegen gezogen wird, ergeben sich $20 \cdot 19 = 380$ mögliche Paare. Die günstigen werden abgezählt, indem überlegt wird, dass im ersten Zug drei verschiedene rote Kugeln infrage kommen und im zweiten Zug vier verschiedene blaue. Es ergeben sich also $3 \cdot 4 = 12$ günstige Paare und durch einschrittige Anwendung der Laplace-Regel dieselbe Wahrscheinlichkeit wie in XIII.

Auch diese Überlegung lässt sich mit einem Baumdiagramm veranschaulichen. Diesmal visualisiert das Diagramm aber nicht den Prozess des Ziehens, sondern die Struktur der Ergebnismenge gemäß der Produktregel der Kombinatorik.

Auch bei dieser Aufgabe sind also unterschiedliche Denkweisen und Modellierungen möglich. Allerdings fällt es Lernenden hier in der Regel leicht, die andere Denkweise nachzuvollziehen und ins eigene Repertoire aufzunehmen.

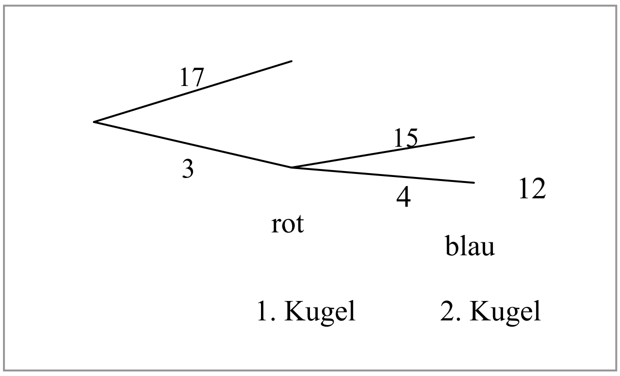

Abbildung 2: Produktregel der Kombinatorik

Etwas anders sieht es bei möglichen Lösungen der Teilaufgabe b) aus. Bei ihr sind mehr als zwei Denkweisen möglich und treten in den Übungen auch auf. Hierin liegt wiederum viel Potenzial für die Reflexion der Lösungswege und Motivation für die strukturelle Frage nach dem „*Warum ist dies so?*". Fünf Ansätze, die sich mal mehr, mal weniger voneinander unterscheiden, werden vorgestellt:

(XIV) Natürlich kann wie in Aufgabe a) ein Baumdiagramm zur Visualisierung genutzt werden. Wenn man aber beim ersten Zug ansetzt und sich bis zum elften Zug durchkämpft, braucht man selbst bei Betrachtung einer komprimierten Baumstruktur ein großes Blatt oder eine große Tafel.

(XV) Sehr elegant und für Lernende häufig „verblüffend einfach" ist ein einfaches Symmetrie-Argument, das einen Laplace-Ansatz begründet: Keine der 20 Kugeln ist im elften Zug bevorzugt. Es gibt drei rote Kugeln, also ist die Wahrscheinlichkeit

$$P(11.\,Zug\,rot) = \frac{3}{20}.$$

(XVI) Wen (XV) nicht überzeugt, der kann durch die folgende Überlegung möglicherweise überzeugt werden. Wenn die Urne leergezogen wird, ergeben sich bei 20 Kugeln 20! Möglichkeiten, dies zu tun. Auf dem elften Platz liegt in den günstigen Fällen eine von drei roten Kugeln, die anderen 19 in einer beliebigen Permutation auf den anderen 19 Plätzen. Es ergibt sich also:

$$P(11.\,Zug\,rot) = \frac{3 \cdot 19!}{20!} = \frac{3}{20}$$

(XVII) Der nächste Ansatz hält gewissermaßen die drei roten Kugeln fest und ordnet ihnen die Plätze zu. Eine Kugel muss auf Platz elf liegen, die anderen beiden auf zwei der übrigen 19. Diese Überlegung führt zu

$$P(11.\,Zug\,rot) = \frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{3}{20}$$

(XVIII) Ganz ähnlich ist die letzte hier vorgestellte Überlegung, die alle Kugeln bei der Platzverteilung im Blick hat. Da nun mehr als zwei Kategorien von Kugeln betrachtet werden, treten in Zähler und Nenner Multinomialkoeffizienten auf. Der Ansatz (XVII) ist demgegenüber einfacher, da er nur das Wesentliche in den Blick nimmt. Der aufwändigere Ansatz taucht aber auch auf:

$$P(11.\,Zug\,rot) = \frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{19}{4,2,7,6}}{\binom{20}{4,3,7,6}} = \frac{3}{20},$$

dabei ist $\binom{19}{4,2,7,6} = \frac{19!}{4!\cdot 2!\cdot 7!\cdot 6!}$

Beim Vergleich der fünf vorgestellten Lösungsansätze und einer detaillierten Analyse lassen sich wieder ganz unterschiedliche Denkweisen und Perspektiven identifizieren. Mal wird eher von den Kugeln aus gedacht, mal eher von den Zügen aus. Mal wird eher *prozessorientiert* gedacht, mal eher *strukturorientiert*. Die Denkweisen unterscheiden sich teilweise derart, dass Lernende eine andere als die selbstgewählte nur schwer nachvollziehen können.

Von den unterschiedlichen Lösungsansätzen kann sicherlich (XV) hervorgehoben werden, da er einfach und elegant ist. Voraussetzung hierfür ist aber die Sicherheit, dass die Symmetrie-Überlegung hier taugt. Wenn man sich dies einmal klar gemacht hat, dann kann diese elegante Modellierung auch für komplexere Fragen genutzt werden. Betrachten wir hierfür abschließend Teilaufgabe c):

c) Wie wahrscheinlich ist es, dass im 15. Zug eine grüne Kugel gezogen wird, wenn im 13. eine rote gezogen wurde?

Aufgabe: Urne c)

Die Antwort lautet schlicht und einfach $\frac{6}{19}$.

Denn man weiß nur, dass eine rote Kugel weg ist. Die übrigen 19 Kugeln habe dieselbe Chance, im 15. Zug gezogen zu werden und sechs Kugeln davon sind grün.

4.2 Aktueller Realitätsbezug: *Keno Lotterie*

Einen für den Mathematikunterricht sehr gut geeigneten Realitätsbezug stellt die Anfang 2004 in einigen Bundesländern eingeführte *Keno Lotterie* dar. Sie weist mehrere für den Unterricht interessante Aspekte auf. Zunächst ist sie die erste Lotterie, die in Deutschland virtuell durchgeführt wird. Die Ziehung der Zahlen erfolgt mit einem Computer, der eigens zu diesem Zweck vom *Fraunhofer Institut für Rechnerarchitektur und Softwaretechnik* konzipiert wurde. Die Lotterie wird vor allem über das Internet gespielt und richtet sich an Jugendliche bzw. junge Erwachsene. *Keno* ist vermutlich die älteste Lotterie der Welt. Es wurde bereits vor über 2000 Jahren als weißes *Taubenspiel* in China gespielt. Seit langem ist *Keno* (auch *Bingo* genannt) in angelsächsischen Ländern beliebt.

Stochastisch gesehen ist *Keno* strukturgleich zur *Genueser Lotterie*. Es werden aus 70 Zahlen 20 gezogen. Die Spieler müssen sich für eine der Spielvarianten *Kenotyp* 2 bis *Kenotyp* 10 entscheiden und dabei zwei bis zehn Zahlen tippen. Die Anzahl *getippter* und die Anzahl *gezogener* Zahlen unterscheiden sich also in jedem Fall. Als Einsatz können die Spieler 1 €, 2 €, 5 € oder 10 € auswählen.

Anders als bei der *Genueser Lotterie* gewinnt man nicht nur dann, wenn alle getippten Zahlen gezogen wurden, sondern zum Teil auch, wenn weniger Zahlen richtig sind. In den Spielvarianten mit acht, neun oder zehn getippten Zahlen gewinnt man zusätzlich, wenn *keine* Zahl richtig getippt wurde. Daher ist *Keno* die erste Lotterie, die „Pechvögel“ belohnt. Insgesamt ergeben sich 36 Gewinnklassen und somit jede Menge Berechnungen. Auf der Rückseite des *Keno*-Tippscheins sind alle Gewinnklassen beschrieben. Wie bei der *Genueser Lotterie* gibt es feste Gewinnsätze, die vom einfachen bis zum 100 000fachen des Einsatzes gehen.

Theoretisch könnte also die Lotterie zu einem Verlustgeschäft für den Anbieter werden. Um dem entgegen zu wirken, sind die beiden höchsten Gewinnklassen „gedeckelt“. Beim Kenotyp 10 wird bei 10 Richtigen der 100 000fache Einsatz höchstens an 5 Gewinner gezahlt. Fallen mehr Spieler in diese Gewinnklasse, so wird die Maximalsumme unter ihnen aufgeteilt. Eine ähnliche Regelung gilt beim Kenotyp 9 und bei 9 Richtigen, hier ist die Deckelung bei 10 Gewinnern.

Durch die Aktualität dieser Lotterie (sie hat das *Rennquintett* ersetzt, das für die kombinatorischen Grundaufgaben so beliebt ist!) dürfte es eine erhebliche Motivation unter Schülerinnen und Schülern bzw. unter Studierenden geben, sich detailliert mit ihr auseinander zu setzen.

5 Ausblick

Die ausführliche Darstellung in Abschnitt 2 und didaktische Reflexion in Abschnitt 3 des Einsatzes der *Genueser Lotterie* in der universitären Lehrerbildung sowie die weiteren Beispiele in Abschnitt 4 haben Aspekte von Aufgabenkontexten herausgearbeitet, die günstig für produktive Lernumgebungen sind. Wenn eine Lehr-Lernsituation gemäß aktueller mathematikdidaktischer Konzeptionen gestaltet werden soll, gilt es, Kontexte zu finden, die solche Aspekte aufweisen.

Die Suche nach solchen Kontexten bzw. ihre Entwicklung ist wesentlich für die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts. Dabei reicht ein *guter Kontext* alleine nicht aus. Er muss auch für einen *guten Unterricht* genutzt werden, was in konkreten Lehr-Lern-Situationen nicht immer leicht ist. So muss u. a. ausreichend Zeit für individuelle Lernprozesse und die Reflexion dieser Prozesse vorgesehen sein, und es müssen unterschiedliche Lösungsprozesse zugelassen und diskutiert werden.

Für die Mathematikdidaktik bieten Aufgaben wie die Analyse der *Genueser Lotterie* oder auch die kontextfreien Urnenaufgaben Anlass, unterschiedliche Denkweisen und Perspektiven zu erforschen:

- Lassen sich über verschiedene Aufgaben hinweg bei Personen gleiche Denkweisen finden (z. B. *situationsnah* oder *abstrakt*, *prozessorientiert* oder *strukturorientiert*)?
- Korrespondieren diese Denkweisen mit bereits gefundenen und untersuchten Kategorien der Mathematikdidaktik wie *prädikativem* und *funktionalem* Denken?

Für erste Zugänge zu diesen Fragen bieten sich zunächst qualitative empirische Untersuchungen mit klinischen Interviews an, in denen z. B. bestimmte Typen stochastischen Modellierens unterschieden werden. Anschließend können Korrespondenzanalysen mittels eines kombinierten qualitativ-quantitativen Vorgehens durchgeführt werden.

Anmerkung:

Die Kaufkraft eines Francs in Frankreich um 1758 dürfte der von ca. 8 € zur heutigen Zeit entsprechen. Eine Umrechnungstabelle steht im Internet unter:
http://www.giacomo-casanova.de/geld.htm

Literatur

Biermann, M. /Blum, W. (2002): Eine ganz normale Mathe-Stunde? Was „Unterrichtsqualität“ konkret bedeuten kann. In: *Mathematik lehren* 20, Heft 108, S. 56-60.

Blum, W. (1996): Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht. In: Kadunz, G. /Kautschitsch, H. /Ossimitz, G. /Schneider, E. (Hg.) (1995): *Trends und Perspektiven.* Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur „Didaktik der Mathematik“ in Klagenfurt vom 26.-30.9.1994. Wien: Hölder/Pichler/Tempsky, S, 15-38.

Borneleit, P. /Danckwerts, R. /Henn, H.-W. / Weigand, H.-G. (2001): Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: Tenorth, H.-E. (Hg.): *Kerncurriculum Oberstufe. Mathematik – Deutsch – Englisch.* Weinheim/Basel: Beltz, S. 26-53.

Büchter, A. (2004): Typische Merkmale stochastischer Modellbildung am Beispiel der Lotterie von Casanova. In: Reiss, K. (Hg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2004.* (im Druck)

Childs, J. R. (1977): *Casanova. Eine Biographie.* München: Blanvalet.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* 2 Bände. Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.

Klieme, E. /Neubrand, M. /Lüdtke, O. (2001): Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: Deutsches PISA-Konsortium (Hg.): *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich.* Opladen: Leske+ Budrich, S. 139-190.

Krätz, O. /Merlin, H. (1995): *Casanova. Liebhaber der Wissenschaften*. München: Callwey

Schupp, H. (1988): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. In: *Der Mathematikunterricht* 34, Heft 6, S. 5-16.

Schwank, I. (1996): Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. In: *Zentralblatt f. Didaktik der Mathematik* 28, Heft 6, S. 168-183

Wickmann, D. (1998): Zur Begriffsbildung im Stochastikunterricht. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 19, Heft 1, S. 46-80.

Winter, H. (1992): Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 13, Heft 1, S. 23-53.

Anschrift der Verfasser

Andreas Büchter, Dipl. Math.
Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn
Universität Dortmund Fachbereich Mathematik
Institut für Entwicklung und Erforschung
des Mathematikunterrichts (IEEM)
44221 Dortmund

andreas.buechter@math.uni-dortmund.de
wolfgang.henn@math.uni-dortmund.de